

# ПРИЛОЖЕНИЕ L

## Интерферометры в оптоволоконной технике

Рассмотрены основные типы интерферометров и приведены их основные технические характеристики.

### I. Интерференция волн. Двухлучевые интерферометры

Явление интерференции – это явление перераспределения плотности потока энергии в световом пучке, обусловленное суперпозицией волн. Интерферометры – это устройства, предназначенные для преобразования фазового распределения, имеющего место во входном световом поле, в распределение интенсивности в выходном световом пучке. Здесь речь идёт о входном световом поле, так как для появления интерференции необходим не один, а несколько световых пучков с различающимися параметрами.

При наличии двух световых пучков с амплитудами напряжённости электрической составляющей поля  $E_1 = E_{01} \cdot \exp[-j \cdot (\omega t - \varphi_1)]$  и  $E_2 = E_{02} \cdot \exp[-j \cdot (\omega t - \varphi_2)]$  результат суперпозиции будет иметь вид  $|E| = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  учитывают как направления волновых векторов, так и состояния поляризации рассматриваемых волн. Интенсивность в выходном пучке определится из соотношения

$$I = \frac{1}{2 \cdot \bar{Z}_v} \cdot \operatorname{Re}(E \cdot E^*), \quad (\text{L.1})$$

где  $E$  – комплекснозначная амплитуда суммарного поля,  $E^*$  – комплексносопряжённая для неё величина,  $\bar{Z}_v$  – комплекснозначное волновое сопротивление среды.

С учётом  $\operatorname{Re}(E_1 \cdot E_1^*) = 2\bar{Z}_v \cdot I_1$ ,  $\operatorname{Re}(E_1 \cdot E_2^*) = 2\bar{Z}_v \cdot E_{01} \cdot E_{02} \cdot \exp[j(\varphi_2 - \varphi_1)]$ ,  $\operatorname{Re}(E_2 \cdot E_1^*) = 2\bar{Z}_v \cdot E_{02} \cdot E_{01} \cdot \exp[-j(\varphi_1 - \varphi_2)]$  и  $\operatorname{Re}(E_2 \cdot E_2^*) = 2\bar{Z}_v \cdot I_2$ , где  $I_1$  и  $I_2$  – интенсивности взаимодействующих пучков, выражение (L.1) может быть переписано в виде

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \cdot \sqrt{I_2} \cdot \cos(\delta), \quad (\text{L.2})$$

где  $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ . Из (L.2) видно, что интенсивность в интерференционной картине изменяется от минимального значения  $I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$  при  $\cos(\delta) = -1$  до максимального значения  $I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$  при  $\cos(\delta) = 1$ .

Чтобы осуществить двухлучевую интерференцию, необходимо иметь две монохроматические волны с одинаковыми или близкими параметрами: амплитудами, состояниями поляризации и частотами. Даже незначительное отличие частот приводит к биениям, что нарушает устойчивость интерференционной картины. Так как, по определению, волны с неизменными параметрами имеют бесконечную продолжительность во времени, то очевидно, что в природе они не существуют. Можно получить волны, пригодные к интерференции, если они возникают в результате разделения одной и той же волны на две части. Обе части волны в отношении изменения их фазы во времени являются точными копиями исходной. Однако полной аналогии с

интерференцией монохроматических волн здесь не получится, поскольку каждая из волн имеет конечное время когерентности [39], в течение которого эти волны действительно могут интерферировать. Поэтому картина интерференции монохроматических волн является лишь первым приближением в изучении интерференции волн от реальных источников.

Получение волн для реализации двухлучевой интерференции в ВОСП, как правило, осуществляется путём деления амплитуды волны. Максимум интерференции наблюдается в случае:  $\delta = 2\pi m$ , минимум:  $\delta = \pi(2m + 1)$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  При этом разность фаз лучей  $\delta$  может происходить как из-за геометрической разности хода, так и разности показателей преломления  $\Delta n = n_1 - n_2$ , что реализовано в ВОСП в коммутационном элементе, построенном на основе эффекта Погкельса [39] и двухлучевого интерферометра Маха-Цендера.

## II. Многолучевая интерференция волн

Многолучевая интерференция возникает в интерферометре Фабри-Перо (ИФП). Отличие от двухлучевой интерференции состоит в принципиальном наличии многих (более двух) интерферирующих лучей. В [144] показано, что с увеличением количества интерферирующих лучей уменьшается ширина интерференционных резонансов, что повышает контрастность интерференционной картины. Так как применение ИФП в ВОСП является весьма масштабным, остановимся на рассмотрении его характеристик подробнее.

Многолучевая интерференция может образоваться между двумя любыми отражающими поверхностями [39], схема хода лучей в ИФП представлена на рис. L.1. Передаточная функция ИФП получается путём сложения убывающей прогрессии, каждое слагаемое которой представляет амплитуду электрической напряжённости поля переотразившейся в интерферометре  $N$  раз световой волны:

$$E = \sigma E_0 + \sigma \rho E_0 \cdot e^{j\delta} + \sigma \rho^2 E_0 \cdot e^{2j\delta} + \dots + \sigma \rho^{N-1} \cdot E_0 \cdot e^{j(N-1)\delta} . \quad (L.3)$$

В выражении (L.3) и на рис. L.1 введены обозначения:  $\sigma$  и  $\rho$  – коэффициенты пропускания и отражения обоих зеркал ИФП по амплитуде, аналогично [39]. Предполагается, что потери излучения, проходящего ИФП, являются малыми.

Сумма ряда (L.3) имеет вид

$$E = \frac{\sigma E_0}{1 - \rho \cdot e^{j\delta}} , \quad (L.4)$$

или то же по интенсивности:

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \sin^2(\delta)} = \frac{I_0}{1 + D \cdot \sin^2(\delta)} , \quad (L.5)$$

где  $D$  – коэффициент резкости [144]. В общем случае при нормальном падении лучей на интерферометр разность фаз определяется выражением

$$\delta = \frac{4\pi \cdot n \cdot h}{\lambda} + \delta_1 + \delta_2 , \quad (L.6)$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – скачки фаз на зеркалах, связанные с отражением излучения от среды, оптически более плотной, в среду, оптически менее плотную, либо наоборот (направление изменения  $n$ ).

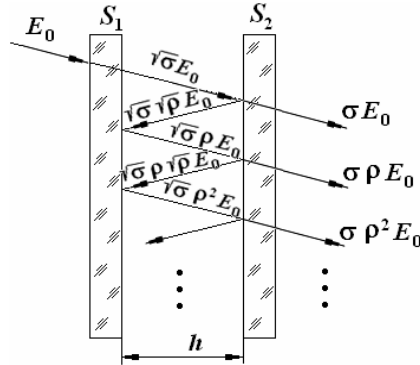


Рис. L.1. Ход лучей в интерферометре Фабри - Перо

В ИФП по рис. L.1  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ .

Условие минимума интерференции  $\delta = \pi(2m + 1)$  даёт значение минимальной интенсивности в интерференционной картине:

$$I = I_0 \cdot \frac{(1 - \rho)^2}{(1 + \rho)^2}. \quad (L.7)$$

Передаточная функция ИФП для различных  $\rho$  представлена на рис. L.2. Видна существенная зависимость значения постоянной составляющей и ширины интерференционного резонанса от коэффициента отражения зеркал.

Согласно [144], ширина интерференционной полосы по уровню половинной интенсивности резонанса, выраженная в долях разности фаз, имеет вид

$$\Delta\delta = \frac{(1 - \rho)}{\sqrt{\rho}}. \quad (L.8)$$

Интерференционный эффект от всех взаимодействующих лучей, определяющий степень резкости интерференционной картины, принято [144] характеризовать «эффективным числом» интерферирующих лучей:

$$N_e = \frac{\pi \cdot \sqrt{\rho}}{(1 - \rho)}. \quad (L.9)$$

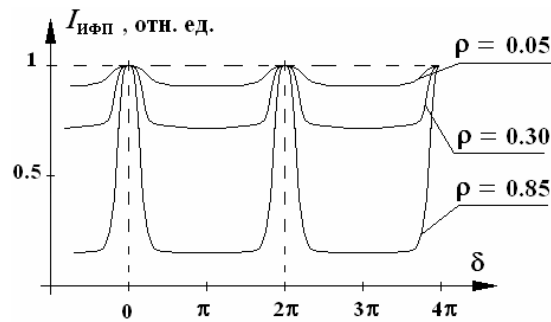


Рис. L.2. Передаточная функция ИФП при различных  $\rho$

При решении ряда задач в оптических системах ИФП используется как спектральный прибор: фильтр или устройство для разделения сигналов на разных длинах волн. В таких приложениях важными являются понятия разрешающей способности интерферометра и его дисперсионной области [39]. Так как это непосредственно не связано с тематикой монографии, в настоящем изложении они опущены.

При использовании ИФП в технике немаловажным является оценка факторов его конструктивных погрешностей. Если зеркала образуют некоторый двугранный угол  $\varepsilon \neq 0$ , рис. L.3, то образующиеся в результате многократных отражений ин-

терферирующие лучи повернуты относительно друг друга (последующий относительно предыдущего) на угол  $2\varepsilon$ . Следовательно, луч, прошедший многократно через интерферометр, будет иметь дополнительную разность хода по сравнению с лучом, претерпевшим то же число отражений, но при параллельном расположении зеркал. Распределение интенсивности в интерференционной картине будет определяться выражением [118]

$$I = I_0 \sigma^4 \left\{ \left( \sum_{i=0}^{N_e} \rho^i \cdot \cos(\delta_i) \right)^2 + \left( \sum_{i=0}^{N_e} \rho^i \cdot \sin(\delta_i) \right)^2 \right\}, \quad (\text{L.10})$$

где  $N_e$  — «эффективное число» интерферирующих лучей,  $\delta_i = \frac{4\pi n h i}{\lambda} \cdot \left( 1 - \frac{1}{3} \cdot (i+1) \cdot (2i+1) \cdot \varepsilon^2 \right)$  — разность фаз между лучом с номером  $i$ , образовавшимся в результате многократных отражений между зеркальными поверхностями, и лучом, непосредственно прошедшим через интерферометр.

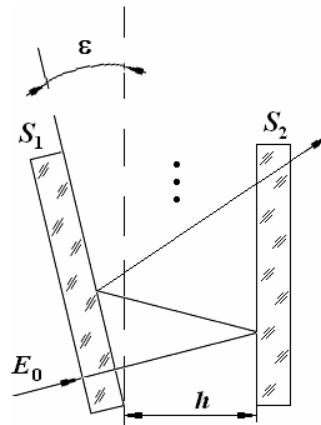


Рис. L.3. Схема хода лучей в ИФП с наклонными зеркалами  $S_1$  и  $S_2$

Расчеты на ЭВМ, представленные в [118], показали, что при углах порядка  $\varepsilon = \text{arctg}(0.001)$  передаточная функция ИФП с учетом наклона зеркал практически совпадает с последней без учета наклона. От  $\varepsilon = \text{arctg}(0.003)$  до  $\varepsilon = \text{arctg}(0.01)$  резонансный экстремум начинает смещаться, имея при этом неодинаковые наклоны справа и слева от точки максимума, рис. L.4. С достижением угла  $\varepsilon = \text{arctg}(0.01)$  наклоны кривой справа и слева становятся одинаковыми. При дальнейшем увеличении угла происходит приближение экстремума, в том числе и по форме, к следующему резонансному максимуму интерференционной картины без наклона зеркал. Это свидетельствует о том, что появляется дополнительный набег фазы, равный  $2\pi$ , связанный с  $\varepsilon$ . Для угла  $\varepsilon = \text{arctg}(0.01)$  можно сказать, что он приводит к появлению дополнительного набегу фазы, равного  $\pi$ .

Коэффициент отражения зеркал оказывает сильное влияние на форму передаточной функции. При наличии  $\varepsilon = \text{arctg}(0.003)$  с увеличением  $\rho$  от 0.1 до 0.5 заметно уменьшается амплитуда резонансного пика — приблизительно на 25%. Это свидетельствует о том, что часть излучения переходит в рассеянное и уходит за пределы

наблюдения. Форма резонанса становится несимметричной, появляются дополнительные экстремумы, более выраженные с увеличением набега фаз  $\delta$  свыше первого порядка интерференции. С дальнейшим увеличением  $\rho$  передаточная функция претерпевает еще большие изменения – амплитуда основных резонансных пиков становится сравнима с амплитудой дополнительных. Для  $\varepsilon = \text{arctg}(0.003)$  и  $\rho = 0.9$  интерференционная картина в целом производит впечатление хаоса - рассеянного излучения с резонансами случайной формы и малой амплитудой [118]. Таким образом, с увеличением коэффициента отражения  $\rho$  в интерферометре с наклонными зеркалами происходит изменение контрастности его интерференционной картины. В [118] представлены подробные исследования фактора контрастности и других характеристик ИФП с наклонными зеркалами.

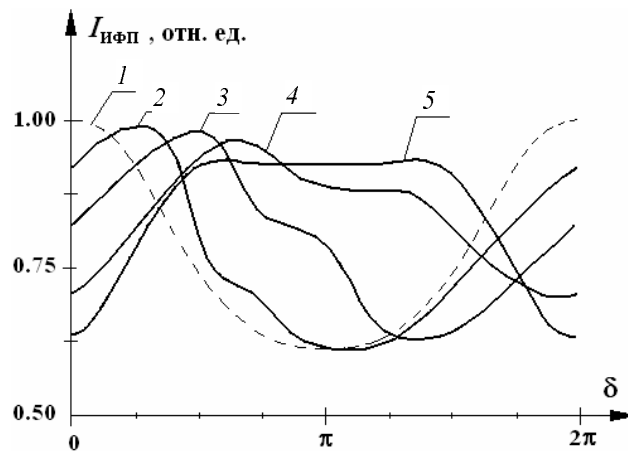


Рис. L.4. Передаточная функция ИФП с учетом угла наклона зеркал в пределах от  $\text{tg}(\varepsilon) = 0 \dots 0.01$ , построены для  $\rho = 0.5$ . Кривая 1 соответствует  $\text{tg}(\varepsilon) = 0$ ; 2 -  $\text{tg}(\varepsilon) = 0.003$ ; 3 -  $\text{tg}(\varepsilon) = 0.005$ ; 4 -  $\text{tg}(\varepsilon) = 0.008$ ; 5 -  $\text{tg}(\varepsilon) = 0.01$

Другим распространённым фактором погрешности ИФП является наличие *фазового объекта* между его зеркалами, рис. L.5, либо на поверхности зеркал (микронеровности, неоднородные включения). Фазовый объект искажает фронт квазиплоской волны в ИФП и изменяет её фазу таким образом, что распределение фаз выходящего из интерферометра волнового фронта является точным изображением фазового объекта [144]. Согласно [6, 145], распределение интенсивности на выходе интерферометра может быть представлено выражением

$$I(\delta, \psi(\mathbf{r})) = \frac{(1 - R_1) \cdot (1 - R_2) \cdot I_0}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \cdot \sin^2((\delta + \psi(\mathbf{r}))/2)}, \quad (\text{L.11})$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – коэффициенты отражения зеркал по интенсивности,  $\delta$  и  $\psi$  – соответственно регулярная и случайная разности фаз интерферирующих лучей:  $\delta$  определяется в соответствии с (L.6), а  $\psi(\mathbf{r})$  имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi'(\mathbf{r}) + \psi''(\mathbf{r}). \quad (\text{L.12})$$

В (L.12)  $\psi'(\mathbf{r})$  и  $\psi''(\mathbf{r})$  представляют случайные набеги фаз соответственно за прямой и обратный проходы и обусловлены как случайными погрешностями изготовления

зеркал, так и флуктуациями фазы волн из-за возможного присутствия фазовых объектов между зеркалами ИФП. Вектор  $\mathbf{r}$  лежит в плоскости зеркал ИФП.

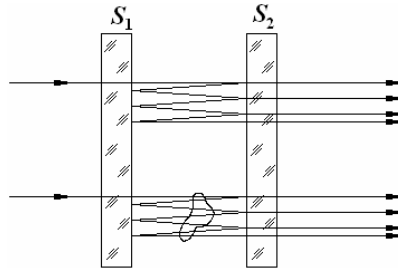


Рис. L.5. Схема, поясняющая влияние фазового объекта на интерференционную картину, расположенного между зеркалами ИФП

Очевидно, что мерой относительных флуктуаций интенсивности может выступать среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_I^2 = \langle I^2(\delta) \rangle - \langle I(\delta) \rangle^2, \quad (L.13)$$

а моменты распределения интенсивности могут быть представлены в виде

$$\langle I^i(\delta) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} I^i(\delta, \psi(\mathbf{r})) \cdot f(\psi(\mathbf{r})) \cdot d\delta, \quad (L.14)$$

где  $f(\psi(\mathbf{r}))$  - функция распределения случайной фазы,  $i = 1, 2, \dots$ . В [6] показано, что ширина резонансной линии ИФП со случайными фазовыми неоднородностями (СФН) не может быть уже, чем значение дисперсии фазовых флуктуаций. Там же показано, что увеличение плотности СФН приводит к снижению контрастности интерференционной картины.

В табл. L.1 представлены основные технические характеристики многолучевых интерферометров с различным количеством отражающих поверхностей.

Таблица L.1

Тип интерферометра	$\delta$	$D$	$I/I_{\max}(D) = f(\delta)$	$I_{\min}/I_0$	Ширина интерференц. полосы, $\Delta\delta$
Двухзеркальный при $\rho_1 = \rho_2 = \rho$	$\frac{4\pi \cdot n \cdot h}{\lambda}$	$\frac{4\rho}{(1-\rho)^2}$	$\frac{1}{1 + D \cdot \sin^2(\delta/2)}$	$\frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2}$	$\frac{(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}$
Трёхзеркальный при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$	$\frac{2\pi \cdot n \cdot (h_2 - h_1)}{\lambda}$	$\frac{16\rho \cdot (1+\rho)^2}{(1-\rho)^4}$	$\frac{1}{1 + D^2 \cdot \sin^4(\delta/2)}$	$\frac{(1-\rho)^4}{(1-\rho)^4 + 16\rho \cdot (1+\rho)^2}$	$0,71 \cdot \frac{(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}$
Четырёхзеркальный при $\rho_1 = \dots = \rho_4 = \rho$	В общем случае не получено		$\frac{(1-\rho)^4}{[(1-\rho)^2 + 4\rho \cdot \sin^2(\delta/2)]^2}$	$\frac{(1-\rho)^4}{(1+\rho)^4}$	$0,64 \cdot \frac{(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}$

# ПРИЛОЖЕНИЕ М

## Марковские процессы и их применение в задачах систем телекоммуникаций

Кратко в доступной форме представлены основные понятия в области марковских цепей и марковских непрерывных процессов. Рассмотрен пример моделирования передаточной функции мультиплексора с использованием Марковского гауссовского процесса Орнштейна-Уленбека.

### III. *Зависимые события. Вероятностная задача прогнозирования*

При знакомстве с техническими объектами, поведение которых носит стохастический характер, непременно приходится сталкиваться со схемой *независимых* или *зависимых* событий (испытаний), которая служит математической моделью для описания обширного круга разнородных явлений. Смысл термина «независимые испытания» состоит в том, что исход испытания в некоторый дискретный момент времени совершенно не влияет на исход любого другого испытания в любой последующий момент. Общая постановка решаемой в подобных условиях задачи такова: при заданных вероятностях каждого из возможных событий (в испытании, либо являющихся исходом испытания) необходимо определить вероятность того, что за серию испытаний некоторое событие произойдёт определённое число раз.

Для схемы зависимых испытаний характерно, что вероятность осуществления некоторого события в  $\ell$ -м испытании *зависит* в общем случае от исходов  $\ell - j$  ( $j = 1, 2, \dots, \ell - 1$ ) предыдущих испытаний. При этом естественно предположить, что предыдущие испытания по-разному влияют на исход проводимого испытания. Можно, например, полагать, что при увеличении  $j$  степень этого влияния убывает. В большинстве технических задач можно также допустить, что величина  $j$  ограничена некоторым эффективным числом  $m$ , так что при всех  $j > m$  исходы испытаний уже не влияют на результаты проводимого испытания. Последовательность таких зависимых испытаний названы цепями Маркова (в честь математика А.А. Маркова, который впервые начал изучать схемы зависимых испытаний и получил ряд основополагающих результатов). Выбор числа  $m$  является принципиальным при описании таких цепей, что и определяет их классификацию. В наиболее простом, но весьма распространённом случае осуществить адекватный прогноз исхода будущего испытания можно, располагая знанием об исходе последнего («настоящего») испытания и пренебречь информацией об исходах прошлых испытаний. Про такие цепи говорят [9, 14, 137, 146], что они обладают марковским свойством, и называют их *цепями без последействия*. Под марковским свойством понимается следующее положение: исход испытания в момент  $t_\ell$  зависит только от исхода последнего испытания в момент  $t_{\ell-1} < t_\ell$  и не зависит от исходов всех прошлых испытаний, произведённых до момента  $t_{\ell-1}$ . Иначе: для процесса без последействия «будущее» зависит только от «настоящего» и не зависит от «прошлого».

Очевидно, что влияние предыдущих опытов на последующие носит вероятностный характер. В противном случае, если бы это влияние характеризовалось какой-то детерминированной зависимостью, испытания можно было бы и не проводить. В этой связи *основной задачей исследования марковской цепи* является опреде-

ление безусловных вероятностей  $p_k(\ell)$  нахождения системы (пусть система будет обозначена через **MUX** для облегчения восприятия приведённого далее примера) в некотором своём состоянии  $\text{mux}_k$  на определённом ( $\ell$ -м) шаге:

$$p_k(\ell) = P\{\text{MUX}(\ell) = \text{mux}_k\} \quad k = 1, 2, \dots, \hat{N}; \quad \ell = 1, 2, \dots \quad (\text{M.1})$$

В (M.1)  $k$  – счётчик состояний, количество которых в рассматриваемой задаче должно быть счётно (конечно либо бесконечно),  $\ell$  – номер шага, этапа, момента времени.

Каждое состояние системы  $\text{mux}_k$  характеризуется совокупностью состояний слагающих её узлов (применительно к решаемой задаче). Следовательно, число состояний системы  $\hat{N}$  определяется перебором по количеству неупорядоченных сочетаний [37] из  $K_1$  состояний каждого функционального узла, причём каждое состояние узла может встречаться от 0 до  $K_2$  раз (в любом произвольном сочетании), равных количеству этих функциональных узлов в мультиплексоре – так называемые сочетания с повторениями [37]. Сказанное справедливо для случая, когда функциональные узлы в мультиплексоре обладают одними и теми же состояниями. В противном случае необходимы либо частные предположения, либо непосредственный подсчёт состояний системы. Так, например, если мультиплексор типа ТМ.1.1, рассматриваемый в примере раздела 5.2, состоит из 13-ти характерных блоков: 3-х LPA, 3-х LPT, 3-х LPC, 3-х НОА и одного НРС, рис. 2.3, что соответствует  $K_2 = 13$ , и если сам по себе каждый блок может быть хотя бы в одном из двух своих состояний (пусть для примера: «включено» или «выключено»,  $K_1 = 2$ ), то общее количество состояний системы равно

$$\hat{N} = \hat{N}_{\text{вкл}} + \hat{N}_{\text{выкл}} = 2 \cdot \frac{(K_1 + K_2 - 1)!}{(K_2 - 1)! \cdot K_1!} = 182 \cdot \quad (\text{M.2})$$

Иными словами, под каждым состоянием системы понимается конкретная своя совокупность состояний её узлов, характерная именно в этом случае, рис. М.1. Очевидно, что с течением времени система может переходить из одного своего состояния в другое, совершая «блуждание» по состояниям. Так, прийти к какому-либо своему состоянию с номером  $k$  на  $\ell$ -м шаге система может с вероятностью  $p_k(\ell)$ . Определение наибольшей вероятности  $p_k(\ell)$  по всей совокупности  $k$  от 1 до  $\hat{N}$  для каждого  $\ell$ -го шага позволяет выделить состояние  $k_t^*$  при ( $p = \max, \ell$ ), а значит – найти *траекторию системы* [136] и осуществить прогноз наиболее вероятного последующего состояния(ий).

На рисунке иллюстративно для облегчения восприятия состояния  $l$ -го узла изображены геометрическими фигурами, количество и форма которых могут меняться от одного узла к другому. Каждое состояние системы  $\text{mux}_k$  характеризуется набором этих фигур (обведено непрерывной линией) по всем столбцам матрицы.

Согласно [136 и др.], решение задачи о нахождении вероятностей  $p_k(\ell)$  может быть произведено, если известны *условные вероятности перехода* системы из одного своего состояния в другое  $p_{kh}$ , где  $k$  и  $h$  отвечают за перебор состояний системы по совокупности [1,  $\hat{N}$ ], а также *начальное состояние* системы  $k_{\text{нач}}(0)$ . Ясно, что  $p_{k_{\text{нач}}} = p_{k_{\text{нач}}}(0) = 1$ , а безусловные вероятности пребывания системы в других состояниях, кроме  $k_{\text{нач}}$  в 0-й момент времени, равны нулю.



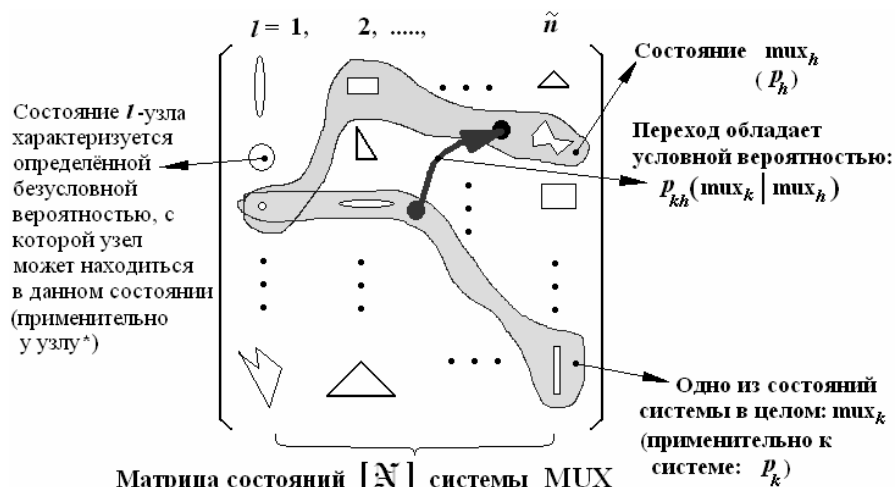


Рис. М.1. Иллюстрация к задаче о марковских цепях

Геометрическими фигурами изображены состояния элементов (узлов) системы, которые в общем случае не идентичны от элемента к элементу и не обязательно количества состояний элементов совпадают. Это означает, что количество геометрических фигур в каждом столбце матрицы в общем случае не одинаковое, и по своей форме геометрические фигуры, расположенные в разных столбцах, не идентичны.

\* указанные вероятности в тексте не представлены.

Условные вероятности  $p_{kh}$  (или переходные вероятности) обычно располагают в матрицу, именуемую переходной матрицей [136] размерности  $\hat{N} \times \hat{N}$ , по главной диагонали которой стоят вероятности задержки системы в предыдущем состоянии (перехода системы в то состояние, в котором она уже находится). Если начальное состояние и матрица переходных состояний системы (не путать с матрицами объектов АСГ) заданы, справедлива следующая рекуррентная формула [136]:

$$p_h(\ell) = \sum_{k=1}^{\hat{N}} p_k(\ell-1) \cdot p_{kh}; \quad h = 1, 2, \dots, \hat{N}; \ell = 1, 2, \dots \quad (\text{M.3})$$

С использованием выражения (М.3) можно находить безусловные вероятности пребывания системы в своих состояниях для каждого наперёд выбранного шага. Это выражение именуется уравнением Колмогорова–Чепмена для марковских цепей [146].

Состояния системы с переходными вероятностями удобно схематически представлять в виде направленного графа. Для иллюстрации последнего, а также пояснения задачи о марковских цепях ниже представлен краткий пример.

### Пример

Рассматривается следующий процесс: система представляет собой техническое устройство (ТУ), работоспособность которого контролируется в определённые моменты времени (скажем, через сутки), и выявленное состояние регистрируется в отчётной ведомости. Каждый осмотр с регистрацией представляет собой «шаг» про-

цесса. Тогда возможные состояния следующие:

ТУ<sub>1</sub> – устройство полностью исправно;

ТУ<sub>2</sub> – частично неисправно, требует наладки;

ТУ<sub>3</sub> – обнаружена серьезная неисправность, требуется ремонт;

ТУ<sub>4</sub> – признано непригодным, списано.

Пусть как наладка, так и ремонт продолжаются менее суток, и после их выполнения устройство возвращается в исходное состояние – ТУ<sub>1</sub>, или списывается (ТУ<sub>4</sub>). Граф состояний такой случайной системы представлен на рис. М.2. Реализация случайного процесса блуждания системы по состояниям может, в частности, иметь такой вид:

$$ТУ_1^{(0)}, ТУ_1^{(1)}, ТУ_2^{(2)}, ТУ_1^{(3)}, ТУ_3^{(4)}, ТУ_1^{(5)}, ТУ_4^{(6)},$$

что означало бы, что в начальный момент устройство исправно; при первом осмотре – также исправно; при втором – частично неисправно, требует наладки; при третьем – исправно; при четвертом – обнаружена серьезная неисправность, требует ремонта; при пятом – снова исправно; при шестом – признано непригодным, списано.

Пусть при этом задана матрица переходных вероятностей:

$$\|p_{kh}\| = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (M.4)$$

значения элементов которой представлены также и на графе, рис. М.2.

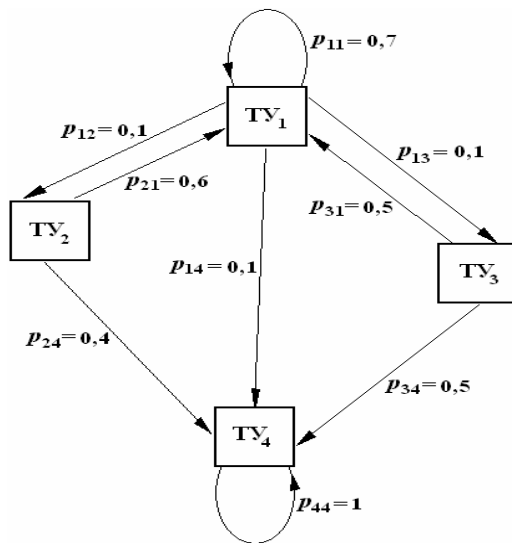


Рис. М.2. Граф состояний системы, характеризующейся процессом изменения работоспособности устройства

Очевидно, что начальные условия имеют вид

$$p_1(0) = 1, p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0. \quad (M.5)$$

Нули недиагональных элементов во второй и третьей строках матрицы перехода означают, что в состоянии ТУ<sub>2</sub> или ТУ<sub>3</sub> система может попасть только через ТУ<sub>1</sub>, т.е. неполадка может иметь место только после того, как устройство было починено.

В соответствии с выражением (М.3) полагая  $\ell = 1$ , находим:

$$p_1(1) = p_1(0) \cdot p_{11} + \underbrace{p_2(0) \cdot p_{21} + p_3(0) \cdot p_{31} + p_4(0) \cdot p_{41}}_{\Rightarrow 0} = p_1(0) \cdot p_{11} = 0,7,$$

$$p_2(1) = p_1(0) \cdot p_{12} + \underbrace{p_2(0) \cdot p_{22} + p_3(0) \cdot p_{32} + p_4(0) \cdot p_{42}}_{\Rightarrow 0} = p_1(0) \cdot p_{12} = 0,1,$$

$$p_3(1) = p_1(0) \cdot p_{13} + \underbrace{p_2(0) \cdot p_{23} + p_3(0) \cdot p_{33} + p_4(0) \cdot p_{43}}_{\Rightarrow 0} = p_1(0) \cdot p_{13} = 0,1,$$

$$p_4(1) = p_1(0) \cdot p_{14} + \underbrace{p_2(0) \cdot p_{24} + p_3(0) \cdot p_{34} + p_4(0) \cdot p_{44}}_{\Rightarrow 0} = p_1(0) \cdot p_{14} = 0,1.$$

Аналогично выполняется подсчёт безусловных вероятностей и для всех последующих шагов. В итоге получаем следующее:

$$p_1(2) = 0,53; p_2(2) = 0,13; p_3(2) = 0,12; p_4(2) = 0,22;$$

$$p_1(3) = 0,421; p_2(3) = 0,131; p_3(3) = 0,113; p_4(3) = 0,335;$$

$$p_1(4) = 0,3435; p_2(4) = 0,1207; p_3(4) = 0,0986; p_4(4) = 0,4372 \text{ и т.д.}$$

Видно, что с увеличением номера шага возрастает вероятность четвёртого завершающего состояния. ▲

В общем случае матрица  $\|p_{kh}\|$  может также зависеть от номера шага. Тогда для решения задачи о марковской цепи необходимо знать начальное распределение вероятностей  $[p_k(0)]$  и  $k$  матриц (для каждого шага - своя) переходных вероятностей.

Вернёмся к примеру раздела 5.2, связанному с исследованием реальной работоспособности аппаратуры линейного тракта, где рассматривается мультиплексор вида ТМ.1.1. Как было отмечено, решение задачи целесообразно проводить с использованием векторных матриц (разд. 3 настоящей монографии), моделирующих процесс группообразование сигнала. Структура математической модели матриц объектов АСГ логически предполагает взаимодействие с классом марковских цепей, когда столбцы (строки) матриц устройств АСГ можно рассматривать как процессы с кусочно-непрерывными (дискретными) состояниями для дискретных моментов времени  $\Delta t$ .

Если предположить, что за время такта (или какого-либо более короткого конечного промежутка времени, например, в соответствии с разбиением  $\bar{k}$ , разд. 3.2) состояние аппаратуры меняется слабо, то охарактеризовать каждую такую марковскую цепь (расположенную в строке или столбце матрицы АСГ по направлению хода времени с ростом номера шага  $\ell$  в цепи) можно, задавая граф или матрицу состояний системы  $[\mathfrak{N}]$  по аналогии с рис. М.1 и матрицу(ы) переходных вероятностей  $\|p_{kh}\|$ . Тогда, зная начальное состояние – мультиплексор работоспособен, можно найти безусловные вероятности  $p_k$  пребывания системы в каждом из своих состояний в каждый последующий момент времени с номером  $\ell$ , и выбирая на каждом шаге максимальную безусловную вероятность – определять тип (вид) состояния системы  $k^*$  ( $p_{k^*} = p_{\max}$ ), тем самым прогнозировать траекторию системы и реальную работоспособность ОЛТ. Заметим, кстати, что представленный подход к решению задачи раздела 5.2 является весьма несложным в математическом смысле – практически всё сводится к выполнению однотипной алгебраической операции вида (М.3) и операции с матрицами (разд. 3.2, 3.3), что легко программируется и не требует большого машинного времени. Тем не менее при выполнении исследований в [132] от применения модели марковских цепей в расчётах реальной работоспособности сетевых уст-

ройств пришлось отказаться. Объяснить это можно как сложностью в составлении огромного числа матриц переходных вероятностей (большое количество узлов, из которых состоит мультиплексор, значительное количество состояний каждого узла, возможная зависимость переходных матриц от времени), так и наличием принципиальной неопределённости в выработке физической концепции к составлению этих переходных матриц, что более существенно. Возможно, что в ряде задач найдутся предположения, существенно упрощающие и делающие прозрачной концепцию разработки матриц переходных вероятностей системы. Тогда с учётом очевидной простоты программирования алгебраических выражений представленный подход будет удобен и найдёт техническое приложение.

В [132] исследование процесса изменения состояния реального мультиплексора проведено с привлечением положений теории непрерывных марковских процессов [135, 137], и, соответственно, при действии предположения о правомерности перехода в решаемой задаче от марковской цепи к марковскому непрерывному процессу, что согласно [136] оправдано во многих технических задачах. Это позволило воспользоваться экспериментальным материалом и данными, полученными из эксплуатации, и завершить вычислительный эксперимент. Перечисленный пример будет представлен ниже (в следующем подразделе Приложения), а здесь для завершения стройности восприятия кратко остановимся на других типах марковских цепей и процессов.

В общем случае марковские процессы классифицируются в зависимости от наличия дискретизации по времени, либо состояниям, либо и времени, и состояниям [136]. Тогда классификация может быть представлена следующим образом:

а. марковские процессы с дискретным временем и дискретными состояниями – марковские цепи;

б. марковские процессы с непрерывным временем и дискретными состояниями – разрывные марковские процессы. Здесь предполагается, что система обладает счётным множеством состояний, но переход возможен в любой момент времени, причём время континуально. Обычно в таких задачах закон распределения моментов времени, когда система может перейти из одного состояния в другое, задаётся случайным потоком [36] и момент перехода отождествляется с осуществлением события из этого случайного потока. Так, переход системы из одного состояния в другое состоит в осуществлении двух зависимых событий: сначала должно произойти событие из управляющего потока, а затем собственно переход. Предполагается также, что собственно переход системы из состояния в состояние происходит мгновенно, поэтому осуществление события из управляющего потока влечёт за собой *скачок* в процессе. Это обстоятельство даёт повод называть разрывные марковские процессы *скачкообразными* [136]. Если множество состояний конечно ( $\hat{N} = \text{const}$ ) или бесконечно, но счётно, то соответствующий процесс называется разрывным процессом со *счётным числом состояний*. Аналогия таких процессов с цепями Маркова весьма значительна, а разница, как указывалось выше, состоит в характере изменения времени, поэтому разрывные марковские процессы со счётным (в частности – конечным) числом состояний называют марковскими цепями с непрерывным временем [146].

с. Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множест-

вом состояний [146]. Состояния разрывного марковского процесса могут образовывать также и непрерывное (континуальное) множество. При этом получается разрывный процесс с непрерывным тем не менее множеством состояний. На рис. М.3 изображены возможные реализации разрывных процессов со счётным (а) и континуальным (б) множеством состояний.

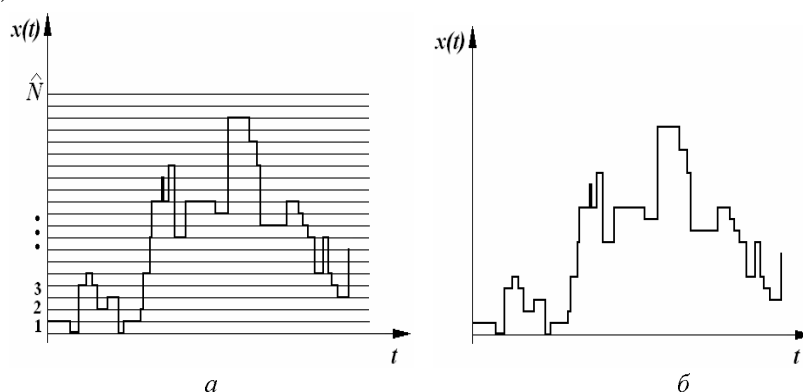


Рис. М.3. Иллюстрация разрывного марковского процесса: а – количество состояний счётно, б – не счётно\*

Уравнения Колмогорова–Чепмена, также являющиеся основополагающими в этом классе задач, из алгебраических переходят в линейные дифференциальные первого порядка, имеющие постоянные либо переменные коэффициенты [136]. Переходная матрица теперь содержит эти коэффициенты, именуемые *интенсивностями потоков*. Так, для рассматриваемой физической системы (объекта) записывается система уравнений первого порядка (количество уравнений совпадает с количеством состояний), в результате решения которой определяются временные зависимости безусловных вероятностей состояний:  $p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t), \dots, p_{\hat{N}}(t)$ . В [33, 118] достаточно подробно рассмотрен пример нахождения траектории стохастического объекта, представляющего собой систему взаимодействующих элементов ИФП (являющихся моделью физического тракта ВОСП).

Каждому интерферометру задано три состояния: **min**, **max** и **среднее**, в которых они могут пребывать независимо друг от друга с равномерной плотностью вероятности. В задаче предполагается также, что когерентность излучения высокая и передаточная функция этой связанной системы является зависящей от состояний интерферометров. В [118] составлена и решена система уравнений Колмогорова–Чепмена для рассматриваемой физической модели ВОСП и найдена среднестатистическая передаточная функция линейного оптоволоконного тракта.

\* Скачкообразные процессы с непрерывным множеством состояний подчиняются интегродифференциальному уравнению Колмогорова–Чепмена [146].

Если вернуться к приводимой классификации марковских процессов, то последним видом являются:

d. непрерывнозначные или непрерывные марковские процессы. Рассмотрению этого вида процессов и примера, связанного с определением реальной работоспособности аппаратуры линейного тракта, уделено внимание в следующем подразделе, а здесь лишь для сопоставления с разрывными процессами отметим следующее. Последние характеризуются тем, что за время  $\Delta t$  вероятность скачка значительно меньше вероятности его отсутствия; если же скачок происходил, то состояние системы изменялось и, как правило, на значительную величину [146]. Особенностью *непрерывных марковских процессов* является *малое* перемещение системы за один шаг.

#### IV. Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний

Рассмотрим основные характеристики непрерывных марковских процессов, основываясь на общих представлениях о непрерывных случайных процессах.

Непрерывный процесс наиболее полно описывается многомерной ( $n$ -мерной) плотностью вероятности  $\varphi_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$ , которая определяет вероятность того, что значения случайной функции  $x(t)$  в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  заключены соответственно в интервалах  $(x_1, x_1 + \Delta x_1), (x_2, x_2 + \Delta x_2), \dots, (x_n, x_n + \Delta x_n)$ . При малых  $\Delta x_j$  эта вероятность равна  $\varphi_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \cdot dx_1 \dots dx_n$ . Многомерная плотность вероятности  $\varphi_n$  даёт возможность судить о связи между значениями случайной функции в  $n$  моментов времени и характеризует случайный процесс тем детальнее, чем больше число  $n$ .

По правилу умножения вероятностей зависимых событий:

$$\begin{aligned} & \varphi_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ & = \varphi_{n-1}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \times \\ & \quad \times v_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot dx_n. \end{aligned} \quad (M.6)$$

Величина  $v_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot dx_n$  есть условная вероятность того, что значение случайного процесса в момент  $t_n$  окажется в интервале  $(x_n, x_n + \Delta x_n)$  *при условии*, что в предыдущие моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  процесс принимал значения  $x_\ell$  ( $\ell = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Иными словами, условная вероятность  $v_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot dx_n$  зависит от всей предыстории процесса, начиная с начального момента  $t_1$  и кончая моментом  $t_{n-1}$ . В связи с этим в литературе, посвящённой описанию случайных процессов [7, 135-137, 146 и др.], момент  $t_n$  называется «будущим», момент  $t_{n-1}$  – «настоящим», а все остальные моменты от  $t_1$  до  $t_{n-2}$  – «прошлым». И в таком контексте величина  $v_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot dx_n$  может рассматриваться как *вероятность перехода*.

Согласно [147], процесс  $x(t)$  будет марковским лишь в том случае, когда

$$v_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = v(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (M.7)$$

Соотношение (M.7) определяет *марковское свойство* непрерывных процессов.

Кроме того, в [146, 147] отмечается, что при выборе моментов времени в (M.7) не было сделано никаких оговорок относительно промежутков между ними, откуда следует, что их можно выбирать различными. В частности, промежуток времени между «будущем» ( $t_n$ ) и «настоящим» ( $t_{n-1}$ ) на этом основании может иметь

*произвольную протяжённость.* Однако интуитивно понятно, что чем дальше от «настоящего» отстоит интересующий нас момент из «будущего», тем неопределённое прогнозы, который даёт функция  $v(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$ . Это означает, что дисперсия плотности вероятности перехода с ростом разности  $t_n - t_{n-1}$  должна как-то увеличиваться, или, что то же самое, характер функции  $v(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$  должен зависеть от времени. Тем не менее в [147] показано, что тенденция к «расплыванию» у функции  $v$  сохраняется не для любых значений разности  $t_n - t_{n-1}$ , а стремится в большинстве случаев с ростом последней к своему стационарному значению. В [147] также показано, что у немарковских процессов плотность  $v$  является *функционалом от реализации  $x(t)$* . Это означает, что для таких случаев на характер плотности вероятности перехода влияет форма реализации  $x(t)$  ( $t < t_{n-1}$ ).

В силу условия нормировки, распространяющегося на функцию  $v$ , для каждого момента времени имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot dx_n = 1. \quad (\text{M.8})$$

Отметим, что соотношение (M.6) справедливо и без дифференциальных множителей:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= \varphi_{n-1}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \times \\ &\times v(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (\text{M.9})$$

Применяя соотношение (M.9) последовательно к распределению  $\varphi_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$ , в [146] получим

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= \varphi_1(x_1, t_1) \times v(x_2, t_2 | x_1, t_1) \times \\ &\times v(x_3, t_3 | x_2, t_2) \times \dots \times v(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (\text{M.10})$$

Это означает, что марковский процесс полностью определяется одномерной плотностью распределения  $\varphi_1(x_1, t_1)$  и плотностями вероятности перехода:  $v(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1})$ ,  $j = 1 \dots n$ . Это также означает, что для немарковских процессов представление многомерной плотности вероятности в виде (M.10) невозможно.

В случае, когда плотность вероятности перехода зависит от разности  $t_j - t_{j-1}$  и не зависит от самих значений  $t_j$  и  $t_{j-1}$ , т.е.:

$$v(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}) = v(x_j, t_j - t_{j-1} | x_{j-1}), \quad (\text{M.11})$$

непрерывный марковский процесс, согласно [147], называется однородным. Причём однородность не означает его стационарности. Действительно, двумерная плотность однородного процесса определяется равенством

$$\varphi_2(x_{j-1}, t_{j-1}; x_j, t_j) = \varphi_1(x_{j-1}, t_{j-1}) \times v(x_j, t_j - t_{j-1} | x_{j-1}), \quad (\text{M.12})$$

куда входит зависящая от времени одномерная плотность  $\varphi_1(x_{j-1}, t_{j-1})$ . Согласно [147], марковский процесс становится стационарным лишь тогда, когда  $\varphi_1(x_{j-1}, t_{j-1}) = \varphi_1(x_{j-1})$ .

Непрерывные марковские процессы, равно как и марковские цепи и марковские разрывные процессы, подчиняются фундаментальному соотношению Колмогорова–Чепмена. Для непрерывных процессов оно впервые было получено М. Смолуховским, поэтому интегральный вид перечисленного соотношения называют уравнением Смолуховского [146]:

$$v(x, t | x_0, t_0) \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t | y, \tau) \cdot v(y, \tau | x_0, t_0) \cdot dy. \quad (\text{M.13})$$

Видно, что уравнение Смолуховского накладывает существенные ограничения на вид плотностей вероятности перехода  $v$ : интегрирование по  $dy$  произведения двух функций  $v$  должно, во-первых, исключать зависимость результата интегрирования от промежуточного момента  $\tau$  и, во-вторых, привести к той же самой функции  $v$ .

Классически уравнения Колмогорова–Чепмена записываются в дифференциальном виде, вывод которых представлен в [146, 147]. Здесь же для краткости мы ограничимся тем, что приведём их. Так, первое уравнение Колмогорова имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v(x, t | x_0, t_0)}{\partial t_0} &= K_1(x_0, t_0) \cdot \frac{\partial v(x, t | x_0, t_0)}{\partial x_0} + \\ &+ \frac{K_2(x_0, t_0)}{2} \cdot \frac{\partial^2 v(x, t | x_0, t_0)}{\partial x_0^2}. \end{aligned} \quad (\text{M.14})$$

В (M.14) коэффициенты  $K_1$  и  $K_2$ , согласно [147], представляют следующий физический смысл:  $K_1(t_0, x_0)$  есть средняя скорость изменения ординаты процесса в момент  $t_0$  в точке  $x_0$ ; и  $K_2(t_0, x_0)$  – дисперсия ординаты за время  $\Delta t_0$  относительно той же фиксированной точки  $x_0$ . Отсюда очевидными являются их названия:  $K_1$  – коэффициент сноса и  $K_2$  – коэффициент диффузии процесса.

Несмотря на то, что соотношение (M.14) выведено в свете вполне прозрачного физического смысла, в технических расчётах оно применяется достаточно редко [146], так как дифференцирование ведётся по «прошлому» времени  $t_0$ . Отсюда и название этого уравнения: *обратное уравнение Колмогорова*, или *обращённое в прошлое*.

Второе уравнение Колмогорова (*прямое* или *обращённое в будущее*) выведено более искусственным образом [146], но, тем не менее, получило широкую распространённость при решении задач. Уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} [K_1(x, t) \cdot v(x, t | x_0, t_0)] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x, t) \cdot v(x, t | x_0, t_0)]. \end{aligned} \quad (\text{M.15})$$

Согласно [146], уравнение (M.15) до вывода его А.Н. Колмогоровым встречалось в работах ряда физиков, поэтому в литературе можно встретить для него разные названия: уравнение Фоккера–Планка, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, уравнение Эйнштейна–Фоккера–Колмогорова.

Уравнения (M.14), (M.15) являются дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа и носят название *диффузионных* [147]. По этой причине непрерывные марковские процессы часто называют *диффузионными*. Очевидно, что для отыскания решений приведённых уравнений необходимо задать начальные, граничные условия и функциональные зависимости  $K_1$  и  $K_2$ . Ниже как раз представлен пример конкретного решения (решения уравнения Орнштейна–Уленбека [137] при заданных начальных и граничных условиях) применительно к задаче исследования работоспособности реальной аппаратуры линейного тракта (см. разд. 5.2).



Выше говорилось, что сложность в применении модели марковских цепей к решению задачи разд. 5.2, по описанию поведения реальной стохастической системы, заключается в отсутствии прозрачной физической концепции к составлению матрицы вероятностей перехода. В этой связи для обеспечения состоятельности проводимого вычислительного эксперимента [132] и на базе обобщения реально наблюдаемых явлений был сделан следующий вывод: *без учёта эффектов, связанных с конечной точностью синхронизации, ухудшение работоспособности сетевой аппаратуры происходит по причине влияния на неё большого количества внешних возмущающих факторов*. А именно, имеет место влияние электромагнитных и электростатических помех, акустического шума, вибрации, фоновых излучений, флуктуаций температуры и влажности, что связано с наличием работающих промышленных агрегатов, характерных для сетевых узлов предприятий ТЭК.

Очевидно, что влияние каждого из факторов является случайным. Если ещё при этом влияние каждого такого фактора оказывает *малое воздействие* на ОЛТ, а в совокупности этих факторов много и налицо видимое ухудшение работоспособности сетевого телекоммуникационного устройства, то можно предположить гауссов характер в изменении состояния его узлов [5]. Под «видимым ухудшением работоспособности мультимплексора» в [132] понималось следующее: повышение уровня коэффициента ошибок, появление сигналов NES, NMES, «аварийное состояние», невозможность соединения с определёнными абонентами или выполнения ряда опций, автоматическое несанкционированное переключение статуса синхронизации, а также зависание с существенным замедлением скорости доведения информации до абонента либо переключение на внутристанционные или внешнестанционные резервные каналы.

Как было показано в [132], изучение НТД, различной технической литературы, пособий по настройке и эксплуатации, замена компонентов устройства, так и мультимплексора полностью не приводили к однозначному положительному результату. Так, например, в [3] определённо указывается, что ISDN-сети с учётом имеющего место сегодня уровня подготовки сопровождающей документации включая методики настройки и поддержания работоспособности, требуют *постоянной!* их подстройки в процессе эксплуатации, применяя измерительную базу. В противном случае перечисленные выше признаки снижения работоспособности сети будут являться следствием *нормальной* её эксплуатации! В связи с этим, как указывалось в разделе 5.2, сетевой оператор принял решение о самостоятельном проведении подстройки сети на основе учёта влияния воздействующих факторов.

Для исследования степени близости наблюдаемого случайного процесса в изменении состояния сетевого устройства с марковским процессом, в [132] были произведены замеры уровня внешних влияющих факторов (амплитуд электрических напряжённостей поля электромагнитных помех, акустического шума, вибрации, значений температуры и влажности), наблюдаемые через определённые интервалы времени  $\hat{\tau}_n^{(\ell)}$ , где индекс «п» означает вид изучаемой помехи, а  $\ell$  – счётчик интервалов времени. Далее проводилось изучение «поведения» полученных путём измерений случайных процессов, характеризующих внешние воздействия.

В результате последующего анализа было выявлено, что все эти процессы имеют гауссовскую плотность распределения вероятности и являются нестационарными с различным характерным временем на протяжении рабочего дня. Кроме того, полученное значение помехи в интервале  $\hat{\tau}_n^{(\ell)}$  зависит от значения в предыдущем

интервале  $\hat{\tau}_n^{(\ell-1)}$  (коэффициент нормированной автокорреляционной функции [136] составлял  $0,87 \dots 0,95$  в зависимости от вида помехи), и имеет слабую зависимость от значений, полученных в  $\hat{\tau}_n^{(\ell-2)}$  или ранее (коэффициент корреляции не превосходит  $0,16 \dots 0,21$ ; а для более ранних моментов времени оставался порядка  $0,02 \dots 0,03$ ). Перечисленные исследования для всех видов помех были проведены для различных значений  $\hat{\tau}_n$ : серии начиная от 1 с и заканчивая 1 ч. При этом каждый раз подтверждалась существенная зависимость измеряемой случайной величины от значения, полученного на предыдущем шаге, и слабая зависимость от значений, полученных ранее, в связи с чем было сделано предположение о том, что совокупное случайное воздействие возмущающих факторов, ухудшающих работоспособность ОЛТ настраиваемом сегменте ВОСП, представляет собой марковский гауссовский нестационарный процесс. После обобщения экспериментальных данных в [132] было предложено произвести моделирование процессов изменения значений элементов матриц АСГ, характеризующих работоспособность узлов устройства ТМ.1.1, с использованием марковского гауссовского нестационарного процесса, а именно – процесса Орнштейна–Уленбека. Последний, согласно [137], является единственным нестационарным гауссовским процессом, для которого выполняется условие отсутствия последствия или марковское свойство.

Предложенный подход к моделированию случайного процесса изменения состояния узлов мультимплектора справедлив при действии допущения об отсутствии каких-либо инерционных либо гистерезисных свойств этих узлов по отношению к действию возмущений. Так, в представленных ниже рассуждениях предполагается, что если процесс воздействия на электронные компоненты мультимплектора является марковским, то и процесс возможного изменения свойств этих компонентов – тоже марковский. С приведённой оговоркой можно по аналогии с [137] определить вероятность  $P$  события, при котором произвольный функциональный элемент матриц устройств АСГ ([LPA], [LPT], [LPC], [HOA] и [HPC]) (см. разд. 3.2, 3.3), а также значение вектор-столбца внешней помехи [ $\bullet^{(1)}$ ] ... [ $\bullet^{(5)}$ ] в момент времени  $t$  (в течение интервала  $\Delta t$  с номером  $\ell$ ) лежит между своим начальным значением и некоторым достижимым значением к моменту прекращения действия помехи.

Для сокращения текста дальнейшие рассуждения проведены относительно обобщённого элемента устройств АСГ, обозначенного через  $\mathfrak{A}$  (индекс функционального свойства  $j$ , номер коммутируемого канала  $k$  и наименование матрицы АСГ опущены ввиду идентичности по этим параметрам представленных далее выкладок). Проведённые рассуждения для  $\mathfrak{A}$  аналогично без сужения общности распространяются на все матрицы устройств или помех в АСГ. С учётом проведённой замены *дискретно меняющихся функциональных характеристик* матриц объектов АСГ на *непрерывно меняющийся параметр*  $\mathfrak{A}$  в рассматриваемой задаче, сказанное можно представить следующим образом: если к началу действия помехи  $\mathfrak{A}_{\ell=0} = \mathfrak{A}^{\text{нач}}|_{t=0}$  (начало действия помехи) и  $\mathfrak{A}_{\ell=\hat{N}} = \mathfrak{A}^{\text{кон}}|_{t=t_{\text{кон}}}$ , когда действие помехи прекращается, то плотность вероятности процесса Орнштейна–Уленбека (не путать с плотностью переходной вероятности), согласно [137], записывается:

$$\varphi(\mathfrak{A}^{\text{кон}}, t, \mathfrak{A}) = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{A}} P \left\{ \mathfrak{A}^{\text{нач}} \leq \mathfrak{A} \leq \mathfrak{A}^{\text{кон}}, \text{ если } \mathfrak{A}(t=0) = \mathfrak{A}^{\text{нач}} \right\}. \quad (\text{M.16})$$

Проведение рассуждений относительно плотности вероятности процесса  $\varphi$  взамен плотности переходной вероятности  $\nu$  (которая входит в уравнения Колмогорова) в рассматриваемом случае допустимо благодаря обоснованному в [146] положению о том, что как уравнение Орнштейна–Уленбека, так и его фундаментальное решение являются *идентичными* в отношении как к  $\nu$ , так и к  $\varphi$ .

Согласно разделу 5.2, для идеального мультиплексора значение  $\mathfrak{A}^{\text{нач}}$ , характеризующее работоспособность блоков мультиплексирования и присвоения заголовков, определено  $\mathfrak{A}^{\text{нач}} = 1$ , и для блоков выравнивания  $\mathfrak{A}^{\text{нач}} = 0$ . Значение  $\mathfrak{A}^{\text{кон}}$  может попадать как в допустимый диапазон (при котором ещё обеспечивается работоспособность аппаратуры и качество передачи на требуемом уровне), так и оказываться ниже допустимого порога:  $\mathfrak{A}^{\text{кон}} \leq \hat{\mathfrak{A}}^{\text{кон}}$ ,  $\hat{\mathfrak{A}}^{\text{кон}}$  - критическая величина (для блоков выравнивания то же имеет вид:  $\mathfrak{A}^{\text{кон}} \geq \hat{\mathfrak{A}}^{\text{кон}}$ ). В таком случае можно говорить о выходе аппаратуры из строя под действием помехи, а следовательно, о том, что эксплуатация такого мультиплексора с запредельными значениями  $\mathfrak{A}^{\text{кон}}$  должна быть прекращена.

Согласно [146], для плотности вероятности процесса Орнштейна–Уленбека справедливо следующее уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{A}} + K_2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathfrak{A}^2}. \quad (\text{M.17})$$

Здесь коэффициенты  $K_1$  и  $K_2$  определяются аналогично представленному выше – как коэффициент сноса и дисперсии процесса изменения параметра  $\mathfrak{A}$  в начальный момент при  $t = 0$ .

По аналогии с [137, 146] в [132] получены решения уравнения вида (M.17), удовлетворяющие следующим начальным и граничным условиям для функциональных компонентов каждого мультиплексора на исследуемом сетевом сегменте:

$$\varphi(\mathfrak{A}, 0) = \Psi(\mathfrak{A}) \quad \text{и} \quad \varphi(-\infty, t) = \varphi(+\infty, t) = 0. \quad (\text{M.18})$$

Функция  $\Psi(\mathfrak{A})$  в общем случае меняется как от одного функционального узла к другому, так и от одного мультиплексора к другому, расположенным в различных точках сети, и не является постоянной величиной:  $\Psi(\mathfrak{A}) \neq \text{const}(\mathfrak{A})$ . Но в соответствии с физическим смыслом задачи и согласно данному выше определению при  $t \rightarrow 0$  переменная  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^{\text{нач}}$ , т.е. стремится к вполне определённой *детерминированной* величине. Отсюда следует, что при решении технической задачи можно положить:  $\varphi(\mathfrak{A}, 0) = \delta(\mathfrak{A})$ , где  $\delta(\mathfrak{A})$  – дельта-функция [37] (интеграл от дельта-функции равен единице). Для такой задачи существует аналитическое решение уравнения (M.17) - представлено в [146]:

$$\varphi(\mathfrak{A}^{\text{нач}}, t, \mathfrak{A}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi K_2 \cdot (t - t_0)}} \cdot \exp \left\{ - \frac{[\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^{\text{нач}} - K_1 \cdot (t - t_0)]^2}{2K_2 \cdot (t - t_0)} \right\}. \quad (\text{M.19})$$

Для того чтобы выражение (M.19) приобрело технически понятный смысл для каж-

дого исследуемого устройства, необходимо коэффициентам  $K_1$  и  $K_2$  (на которые распространяется номер коммутируемого канала и номер мультиплексора, расположенного на сетевом сегменте) придать числовые значения, что и было произведено в [132] на основе определённых выводов и расчётов. Тем не менее здесь подобные рассуждения не приводятся в связи с их сугубо частным характером.

Далее в соответствии с представленной в разделах 5.1, 5.2 методикой для каждого функционального узла рассматриваемых мультиплексоров формировались псевдослучайные последовательности (в зависимости от размерности описывающей его матрицы АСГ), характеризующие работоспособность с наибольшей вероятностью (по диапазону значений  $\mathcal{A}$ ):

$$z^{\text{MUX}} = F_{\text{MUX}}^{-1} \left[ \int_0^t \max_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{A}=\mathcal{A}^{\text{нач}}}^{\mathcal{A}} \varphi(\mathcal{A}^{\text{нач}}, t, \mathcal{A}) \cdot d\mathcal{A} \cdot dt \Big|_{t=z(\tilde{j})} \right]^* \quad (\text{M.20})$$

В (M.20)  $\tilde{j}$  - номер равномерно распределённой псевдослучайной числовой последовательности. Как показано в разд. 5.2.2, для устройства типа ТМ.1.1  $\tilde{j} = 195$ .

После того как были получены наиболее вероятные числа  $z^{\text{MUX}}$ , значения элементов матриц АСГ определялись следующим образом: для блоков мультиплексирования и присвоения заголовков

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}^{\text{нач}} \times z_{\ell}^{\text{MUX}} \quad \text{и}$$

для блоков выравнивания  $\mathcal{A}(t) = (1 - \mathcal{A}^{\text{нач}}) \times z_{\ell}^{\text{MUX}} \quad (\text{M.21})$

Далее наиболее вероятная величина  $\mathcal{A}(t)$ , являющаяся траекторией элемента(ов) матрицы АСГ, дополнительно квантовалась по времени для повышения точности расчётов и заносилась в соответствующую матрицу. Подобный подход позволил в свете прозрачной физической концепции произвести моделирование реальной работоспособности мультиплексора.

---

\* Индекс «MUX» свидетельствует о применимости получаемой числовой последовательности к описанию аппаратного устройства.